

# t 檢定 (兩母體之平均數檢定)

概念、獨立樣本、相依樣本

## 兩母體檢定的必要性

---

- ▶ 在此之前，我們探討的是單一母體的檢定，看看抽樣的結果是否符合宣稱的數據。然而...
- ▶ 我們大部分想知道**不同母體的差異**
  - ▶ 男生與女生在飲料花費上有沒有差別？
  - ▶ 男生數學成績真的比女生高嗎？
  - ▶ 台鐵與高鐵的滿意度有沒有差別？
  - ▶ 傳統教學法和建構式教學法何者比較好？
  - ▶ 不同班級(可能不止兩班)的體重有差異嗎？

## t 檢定 (兩母體平均數檢定)

---

- ▶ 當我們要檢定兩個母體是否有差異，
  - ▶ 例如：男女生在飲料花費上是否有差異
- ▶ 最自然的想法，看看兩者的平均數是否相同
  - ▶ 也就是，平均數<sub>男生</sub> = 平均數<sub>女生</sub>
  - ▶ 或 平均數<sub>男生</sub> - 平均數<sub>女生</sub> = 0
- ▶ 如果我們把(平均數<sub>男生</sub> - 平均數<sub>女生</sub>)當作一筆新的資料，那它和單一母體的檢定有何不同？

## t 檢定 (兩母體平均數檢定) (續)

- ▶ 我們把(平均數<sub>男生</sub> - 平均數<sub>女生</sub>)稱作**平均數差異**
  - ▶ 平均數相減，當然是平均數差異~
- ▶ 基本上，平均數差異視為一筆資料，母體平均數為0 (為什麼?)，跟單一母體的檢定沒有不同
- ▶ 差別在於，標差誤的估計方式

- ▶ 單一母體：標準誤 =  $\frac{\text{標準差}}{\sqrt{\text{個數}}} = \sqrt{\frac{\text{標準差}^2}{\text{個數}}}$  或  $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$  或  $\frac{s}{\sqrt{N}}$

- ▶ 兩個母體：標準誤 =  $\sqrt{\frac{\text{標準差}_A^2}{\text{個數}_A} + \frac{\text{標準差}_B^2}{\text{個數}_B}}$  或  $\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{N_A} + \frac{\sigma_B^2}{N_B}}$

# t 檢定 (兩母體平均數檢定) (續)

---

## ▶ t 檢定

- ▶ 只能處理兩個母體的平均數檢定
- ▶ 依照兩個母體的關係，t檢定可分為兩種
  - ▶ **獨立樣本 t 檢定**：兩個母體間是互相**獨立** (我和你沒關係)
    - 男女生在飲料的花費
  - ▶ **成對樣本 t 檢定**：兩個母體間沒有關係 (**相依**樣本)
    - 同一群人，上個月的體重與這個月的體重

## 範例一：獨立樣本

- ▶ 某公司欲瞭解兩訓練中心在教育品質的差異，於是對兩中心受訓者實施一項標準測驗，並以考試成績作為評估兩訓練中心之優劣的依據。其測驗結果如下表，試問兩訓練中心的教育品質是否有差異。

訓練中心1	訓練中心2
$n_1 = 30$	$n_2 = 40$
$\bar{x}_1 = 82.5$	$\bar{x}_2 = 79$
$s_1 = 8$	$s_2 = 10$

## 範例一：獨立樣本 (續)

- ▶ 虛無假設：兩訓練中心沒有差異 ( $\mu_1 - \mu_2 = 0$ )
- ▶ 對立假設：兩訓練中心有差異 ( $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ )
- ▶ 信心水準：95% ( $\alpha = 0.05$ )
- ▶ 我們可知  $-1.96 < z < 1.96$  (亦即區間  $0 \pm 1.96$ )

$$\pm 1.96 \times \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{8^2}{30} + \frac{10^2}{40}} = \pm 4.21$$

- ▶  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 82.5 - 79 = 3.5$
- ▶ 3.5 落在區間  $(-4.21, 4.21)$
- ▶ 結論：無法拒絕虛無假設，故在信心水準95%下，兩訓練中心的教育品質沒有顯著差異。

$$z = \frac{82.5 - 79}{\sqrt{\frac{8^2}{30} + \frac{10^2}{40}}} = 1.6260$$

## 範例二：獨立樣本、單側

- ▶ 前年1月，從某城市湖泊各處抽取85組湖水樣品進行化學分析，測量水中含氮量多寡。但由於道路的使用，使得該湖的鹽分減少。去年1月，從湖的各處再度抽取110組水樣品，並分析其含氮量。經統計上述兩組資料的平均數與標準差，如下表：

含氮量	前年	去年
平均數	18.3	17.8
標準差	1.2	1.8

- ▶ 根據這些資料，是否足以證明去年此湖平均含氮量較前年減少？



## 範例二：獨立樣本、單側 (續)

- ▶ 虛無假設：前年與去年沒有差異 ( $\mu_1 - \mu_2 \leq 0$ )
- ▶ 對立假設：前年與去年有差異 ( $\mu_1 - \mu_2 > 0$ )
- ▶ 信心水準：95% ( $\alpha = 0.05$ )
- ▶ 我們可知  $z > z_\alpha = 1.645$

$$1.645 \times \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = 1.645 \times \sqrt{\frac{1.2^2}{85} + \frac{1.8^2}{110}} = 0.3543$$

- ▶  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 18.3 - 17.8 = 0.5$
- ▶ 0.5 落在  $> 0.3543$  的區間
- ▶ 結論：拒絕虛無假設，故在信心水準95%下，去年的含氣量比前年還要少。

$$z = \frac{18.3 - 17.8}{\sqrt{\frac{1.2^2}{85} + \frac{1.8^2}{110}}} = 2.3213$$

## 範例三：獨立樣本、單側、小樣本

- ▶ 為進行依樣養分配給的研究，茲選取25頭乳牛，比較兩種飼料的效果，一種為脫水牧草，另一為枯萎牧草。隨機自此牛群中選出12頭，餵食脫水牧草；另13頭餵食枯萎牧草。每天平均牛奶產量資料列示如下：

牛奶產量(磅)	
枯萎牧草	44,44,56,46,47,38,58,53,49,35,46,30,41
脫水牧草	35,47,55,29,40,39,32,41,42,57,51,39

- ▶ 假設食用兩種不同草的乳牛，其母體有共同的標準差。試問，這些資料是否足以證明食用枯萎牧草之乳牛的平均牛乳產量大於食用脫水牧草之乳牛的平均產量？

## 範例三：獨立樣本、單側、小樣本 (續)

- ▶ 虛無假設：食用枯萎牧草的平均產量少於脫水牧草  $\mu_1 - \mu_2 \leq 0$
- ▶ 對立假設：食用枯萎牧草的平均產量多於脫水牧草  $\mu_1 - \mu_2 > 0$
- ▶ 信心水準：95%
- ▶ 小樣本，故目標區間為  $t > t(n_1 + n_2 - 2) = t(23) = 1.714$

$$\text{估計的標準差 } s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1 + (n_2 - 1)s_2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{69.91}$$

$$1.714 \times \sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}} = 1.714 \times \sqrt{\frac{69.91}{13} + \frac{69.91}{12}} = 5.737$$

- ▶  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 45.15 - 42.25 = 2.9 < 5.737$ ，沒有落在拒絕區
- ▶ 結論：無法拒絕虛無假設。在信心水準95%下，食用枯萎牧草的乳牛平均產量少於脫水牧草。

$$t = \frac{45.15 - 42.25}{\sqrt{\frac{69.91}{13} + \frac{69.91}{12}}} = 0.8664$$

## 範例四：成對樣本

- ▶ 某一藥劑研究員欲檢定某藥丸是否具有預期的作用：降低服用者的血壓。此項研究先記錄15位大專女性學生的初始血壓，在她們服用6個月後，再度測量其血壓。試問，此藥丸是否有降低血壓的作用。

- ▶ 成對樣本的處理方式
  - ▶ 將每筆資料差異視為一筆新資料
  - ▶ 視為單一母體的平均數檢定

受試者	服藥前	服藥後	
1	70	68	2
2	80	72	8
3	72	62	10
4	76	70	6
5	76	58	18
6	76	66	10
7	72	68	4
8	78	52	26
9	82	64	18
10	64	72	-8
11	74	74	0
12	92	60	32
13	74	74	0
14	68	72	-4
15	84	74	10

## 範例四：成對樣本 (續)

- ▶ 虛無假設：沒有降低血壓 ( $\mu_1 - \mu_2 \leq 0$ )
- ▶ 對立假設：有降低血壓 ( $\mu_1 - \mu_2 > 0$ )
- ▶ 信心水準：95%
- ▶ 小樣本，故區間為  $t > 1.761$

$$t = \frac{\overline{x_1 - x_2} - \mu_D}{\frac{s}{\sqrt{N}}} = \frac{8.80 - 0}{\frac{10.98}{\sqrt{15}}} = 3.10 > 1.761$$

- ▶ 結論：落在拒絕區，拒絕虛無假設。在信心水準95%下，此藥丸有降低血壓的作用。