單一母體的檢定

區間估計、t分配、平均數檢定

區間估計

- 估計
  - 點估計：用樣本資料來估計母體的單一統計量
    - 用樣本平均數$\bar{X}$作為母體平均數μ的估計數
    - 用不偏估計數$s=\sqrt{\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{N-1}}$來估計母體標準差σ
  - 區間估計：估計一個區段，而不是一個點
    - 我們不說200名高中生平均智商是110，我們說他的平均智商可能落在 108 至 115 之間，且 μ 落在 108 至115 的機率有多大
    - 為什麼要估計一個區間？

區間估計 (續)

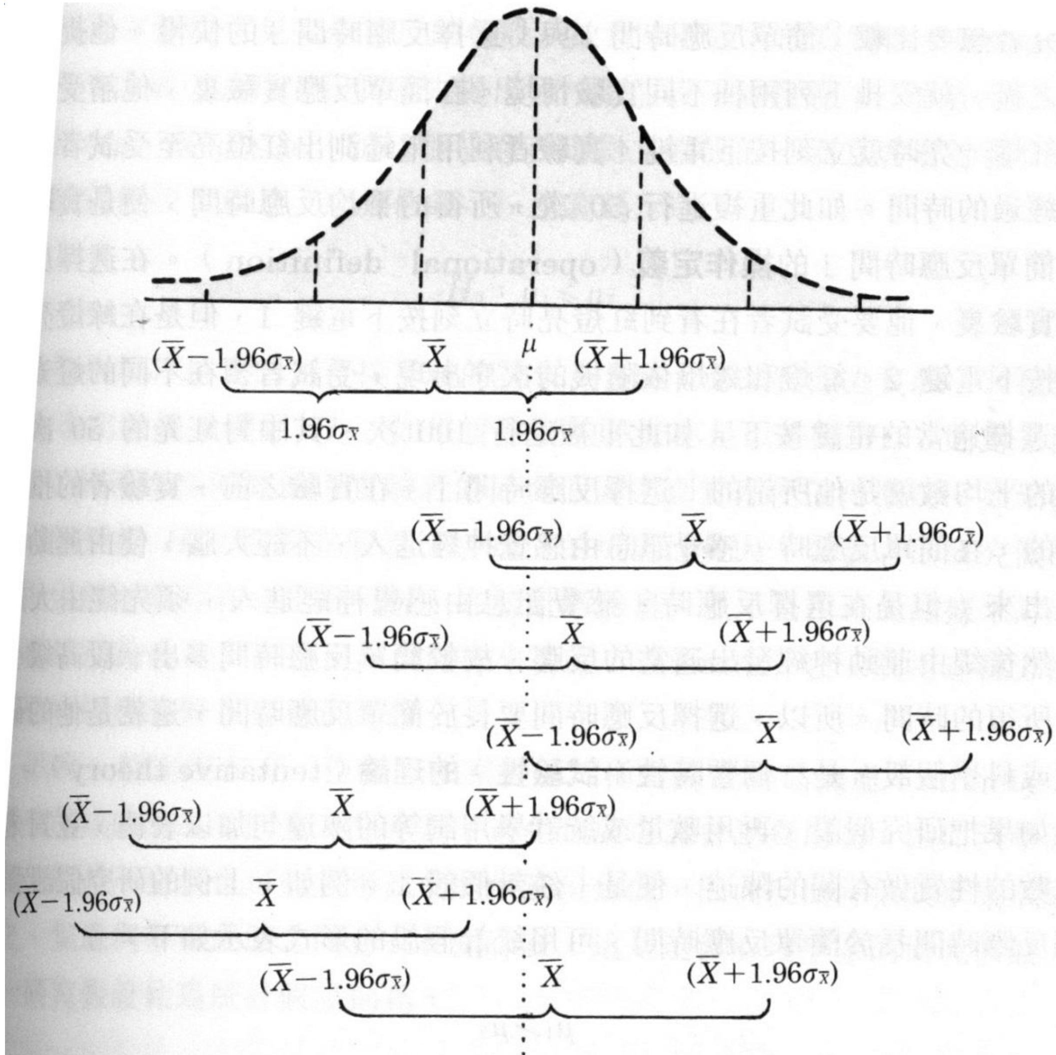

圖 10-2 $\overline{X}$ 上下 $1.96\sigma_{\overline{X}}$ 的信賴區間內包括 μ 在內的概率爲 .95，不包括 μ 在內的概率爲 .05。

區間估計 (續)

平均數的標準誤

母體
- 常態分配
  - 大樣本 ($n \geq 30$)
    - 中央極限定理 $\overline{X} \sim N\left(u, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\boxed{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}$ ……………… (I)
  - 小樣本 ($n < 30$)
    - 母體 σ 已知
      - 常態分配的性質 $\overline{X} \sim N\left(u, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ … (II)
    - 母體 σ 未知
      - t 分配的性質 $\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = t(n-1)$ ……………… (III)
- 非常態分配
  - 大樣本 ($n \geq 30$)
    - 中央極限定理 $\overline{X} \sim N\left(u, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ……………… (IV)
  - 小樣本 ($n < 30$)
    - — $\overline{X}$ 的抽樣分配未定 (視母體分配而定) ……………… (V)

圖 7.1 $\overline{X}$ 抽樣分配的形態

範例一：(常態分配)、大樣本

- 常態分配、大樣本
  - 樣本平均數會遵守平均數是μ，標準差是$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$的常態分配
- 某教師利用魏氏成人智慧量表(WAIS，$\sigma = 15$)測量100 名該校高三學生，得平均智商117。試問該校高三學生的真正智商平均大約為多少？
  - 設定：信心水準95%
  - 學生智力平均數會落在$-1.96 < z < 1.96$

範例一：(常態分配)、大樣本 (續)

$$-1.96 < z < 1.96$$

$$-1.96 < \frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} < 1.96$$

$$-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \bar{X} - \mu_X < 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$-\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}} < -\mu_X < -\bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$\bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}} > \mu_X > \bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$117 + 1.96\frac{15}{\sqrt{100}} > \mu_X > 117 - 1.96\frac{15}{\sqrt{100}}$$

$$114.06 < \mu_X < 119.94$$

範例一：(常態分配)、大樣本 (續)

- 結論1：該校高三學生的真正智商(μ_X)可能在114.06~119.94之間，但是估計錯誤的機率仍有5%存在

- 結論2：在信心水準95%下，該校高三學生的真正智商(μ_X)可能在114.06~119.94之間

t 分配

- 有時候，雖然母體是常態分配，但是我們根本不曉得母體標準差，且抽樣的樣本很少(< 30)，我們就必須採用 t 分配
- 此時，母體標準差必須採用不偏估計值$s = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{N-1}}$來代替它
- 樣本平均數的標準差$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{N}}$
- 常態分配、小樣本
  - 樣本平均數會遵守平均數是μ、標準差是$\frac{s}{\sqrt{N}}$、自由度$N-1$的t分配

範例二：常態分配、小樣本

- 某瘦身機構自機構內大學生隨機抽取10名，測得體重為68, 66, 59, 64, 56, 49, 58, 65, 54, 61公斤。試問，機構內全體大學生平均體重大約多少？
  - 設定：信心水準95%
  - $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{N} = \frac{68+66+59+64+56+49+58+65+54+61}{10} = 60$
  - $s = \sqrt{\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum(X_i-60)^2}{10-1}} = 5.96$
  - 全體大學生體重的平均數會落在 $-2.262 < t_{N-1} < 2.262$

$$-2.262 < \frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{s}{\sqrt{N}}} < 2.262$$

$$\bar{X} - 2.262\frac{s}{\sqrt{N}} < \mu_X < \bar{X} + 2.262\frac{s}{\sqrt{N}}$$

$$55.72 < \mu_X < 64.28$$

單一母體平均數檢定

- 單一母體平均數檢定
  - 看看樣本平均數和母體平均數有沒有差別(差異)
  - 如何看？
  - 看看估計出來的區間，若
    - 樣本平均數的區間包含母體平均數，
    - 或母體平均數的區間包含樣本平均數，
    - (簡單說，看看有沒有在拒絕域)
    - 看來兩者沒有差別；反之，兩者當然不一樣

範例三：(常態分配)、大樣本

- 接續範例一，魏氏成人智慧量表的高三常模平均數為113，試問該校高三學生智力與一般高三學生是否有所不同？
  - 虛無假設：該校高三學生智力 = 一般高三學生智力
  - 對立假設：該校高三學生智力 ≠ 一般高三學生智力
  - 檢定方法：單一樣本平均數檢定、z檢定
  - 設定信心水準95%
  - 樣本平均數的區間為 $114.06 < \mu_X < 119.94$
  - 常模平均數113沒有落在上面的區間內(落在拒絕域了)
  - 結論：拒絕虛無假設。在信心水準95%之下，該校高三學生智力和一般高三學生不同。

$$z = \frac{117 - 113}{\frac{15}{\sqrt{100}}} \doteqdot 2.67$$

範例四：常態分配、小樣本

- 接續範例二，假設一般大學生的平均體重是64公斤，試問，該機構內大學生和一般大學生體重是否不同？
  - 虛無假設：兩者體重相同
  - 對立假設：兩者體重不同
  - 檢定方法：單一樣本平均數檢定、t檢定
  - 信心水準：95%
  - 樣本平均數的區間是$55.72 < \mu_X < 64.28$
  - 母體平均數64落在上面的區間 (沒有落在拒絕域)
  - 結論：無法拒絕虛無假設。所以在信心水準95%下，該瘦身機構的大學生體重和一般大學生沒有差異。簡單說，該機構瘦身不成功。

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{s}{\sqrt{N}}} = \frac{60 - 64}{\frac{5.96}{\sqrt{10}}} \doteq -2.122$$

範例五：(常態母體)、大樣本

- 一位環境論者主張優裕環境可以提高兒童的智力，乃自環境優裕的家庭中隨機抽取98名兒童進行智力測驗。他利用比西智慧量表($\mu = 100, \sigma = 16$)測得結果，$\bar{X} = 103$。問是否可以支持環境憂鬱兒童的平均智商高於100的說法？
  - 虛無假設：？
  - 對立假設：？

$$z = \frac{103 - 100}{\frac{16}{\sqrt{98}}} \doteqdot 1.86$$

  - 結論：？